エルミート行列(演算子)

まず転置行列 A^T を定義。$m\times n$ 行列 $A=(a_{jk})$ の転置行列 A^T は、Aの行と列を入れかえて得られる $n\times m$ 行列のことである。

$$A=(a_{jk})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^T=(a_{kj})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A=(a_{jk})$ を任意の行列とする。Aの要素 a_{jk} をその複素共役 $a_{jk}{}^*$ で置きかえて得られる行列を A^* で表わす。

$$A^*=(a_{jk}^*)=\begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}^* & a_{m2}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$$

正方行列(行と列の数が等しい $n\times n$ 行列のこと) $A=(a_{jk})$ は、

$A^T=A^*$, すなわち $\boxed{a_{kj}=a_{jk}{}^* \text{ のときに エルミート行列}}$ という。

転置と複素共役を同時に行って得られる行列をエルミート共役行列といい、

$A^\dagger$ で表わす。

演算子 $\hat{B}$ が $\hat{A}$ に エルミート共役であるとき、

$$\hat{B}=\hat{A}^\dagger$$

と書く。 とくに、 $\hat{A}^\dagger=\hat{A}$ $\left((\hat{A}f, g)=(f, \hat{A}g)\right)$

が成り立つとき、$\hat{A}$ を エルミート演算子という。