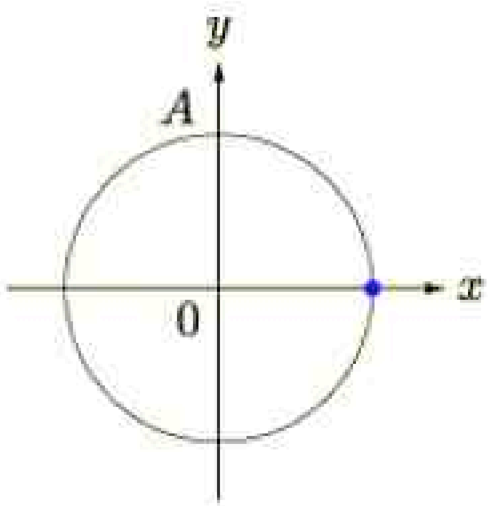
単振動　～等速円運動の射影～

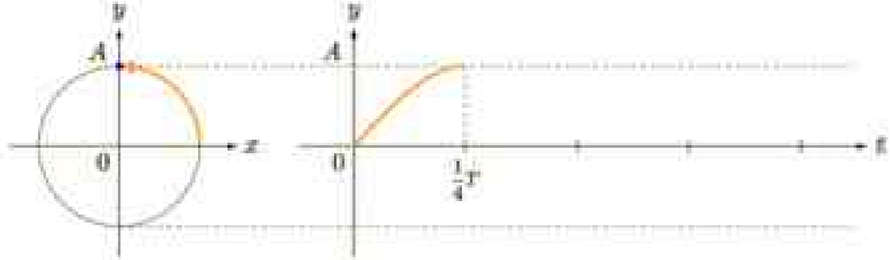
単振動は等速円運動の射影である

半径Aの円周上を運動する等速円運動を考える．分かりやすいように，$x-y$平面状に原点を中心とする半径Aの円を描いておく．物体は時刻$t=0$のとき点$(A, 0)$を出発して，角速度ωで運動する．

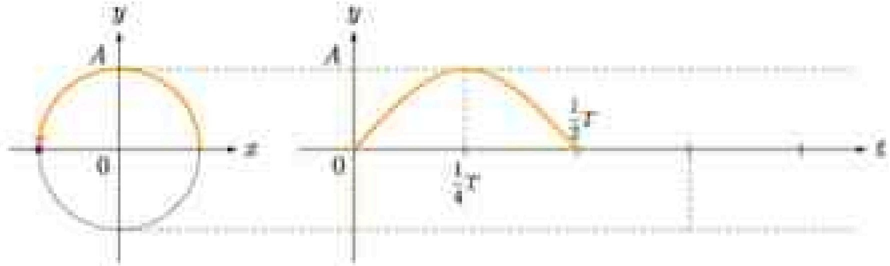


この等速円運動について， y 軸への射影を考えてみる．時間を追って図を描くと，以下のようになる（ T は周期）．

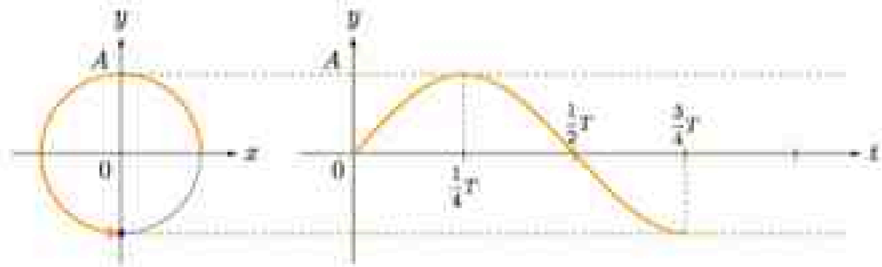
・$t = 1/4T$



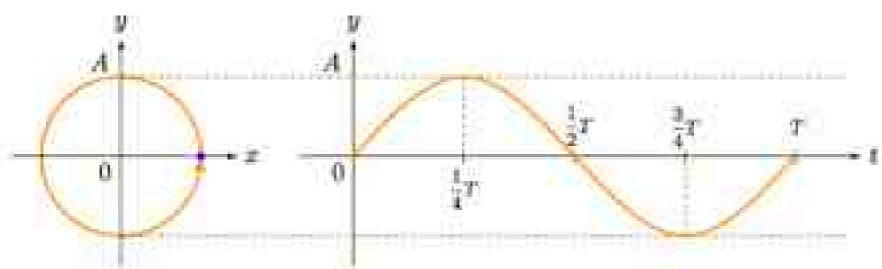
・$t = 1/2T$



・$t = 3/4T$



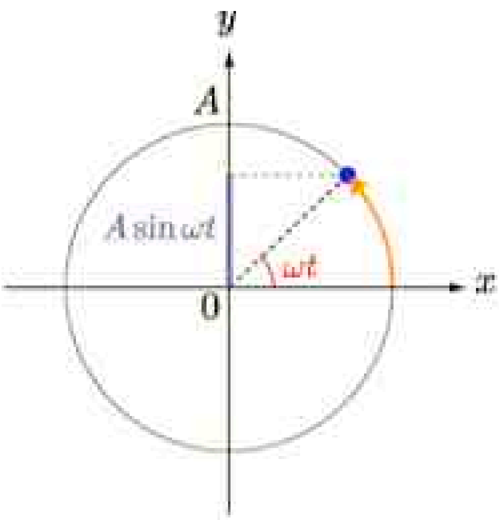
・$t =\ T$



この y 軸への射影が，単振動になる．

変位はどのように表されるか

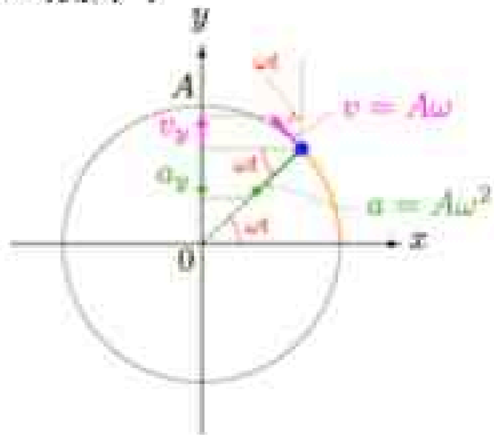
変位yがどのように表されるかを考えてみる．時刻$t = 0$ のとき点$(A, 0)$ を出発して，角速度ω で運動した場合、t [s] 後には以下のようになっている．

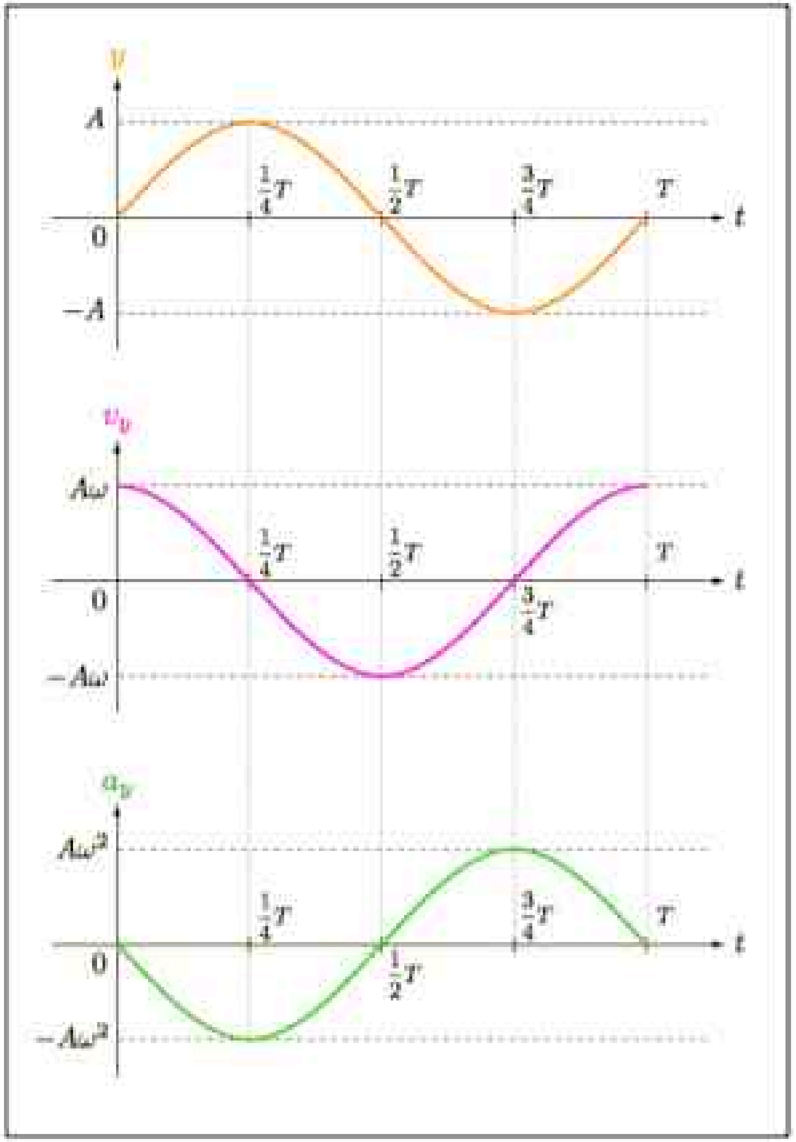


つまり，変位yは，$y = A \sin \omega t$　と表されることになる． Aのことを「振幅」， sin の中身（ここではωt ）のことを「位相」と呼ぶ．

速度と加速度はどのように表されるか

単振動の速度v_y と単振動の加速度a_y はどのようになっているだろうか．図で示すと以下のようになる（速度v，加速度a を，変位と同様にy 軸に射影）．





$v = A\omega$ をy 軸に射影して，

$$v_y = r\omega \cos \omega t$$

$a = A\omega^2$をy 軸に射影して，

$$a_y = -r\omega^2 \sin \omega t$$

となる．また，位相の部分を$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ を用いて

$$y = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

と書き換えることができる。

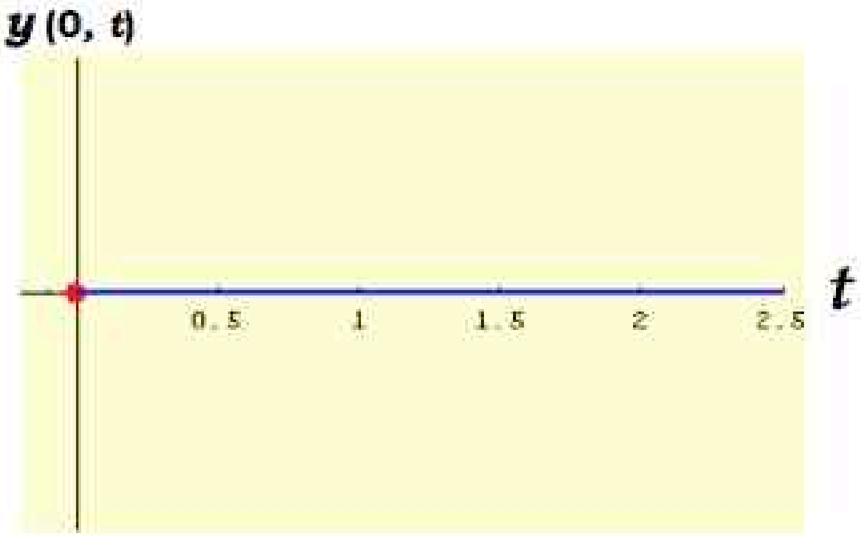
波の式

分かりやすいように波源は原点にあるとする（波源は単振動をしている）．ここで、原点での変位 $y(0, t)$ がどのように表せるかを考える．周期を T とすると $T[s]$ 経過した時に元の変位に戻っていることになるので、時刻 $t = 0$ での変位を0 としてそこから単振動をスタートしたとすると，

$$y(0, t) = A \sin \frac{2\pi}{T} t = A \sin 2\pi \frac{t}{T} \qquad (1)$$

となる。ここで A は振幅を表す．時刻 $t = 0$ からスタートして，$T[s]$ 秒後の $t = T$ のときに初めて，位相が 2π に戻ってくるという式になっている（つまり，変位が元に戻ってくる）．

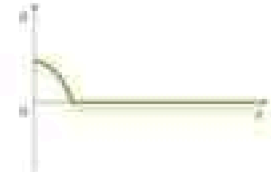
原点の振動が式（１）のように表されるとき、波はどのように伝わっていくかをムービーで表す。



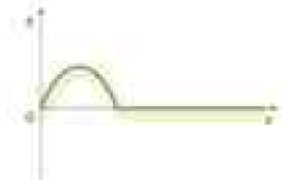
もしもムービーの時刻 t を止めて波形を確認すると、右のようになる。

・$t = 0$

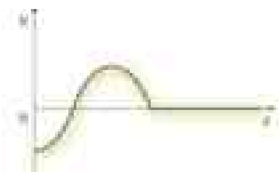
・$t = 1/4T$



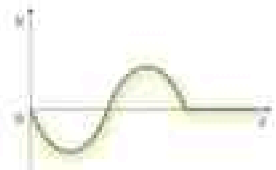
・$t = 1/2T$



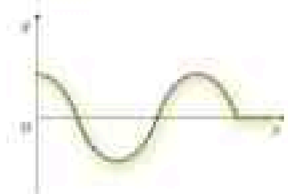
・$t = 3/4T$



・$t = T$

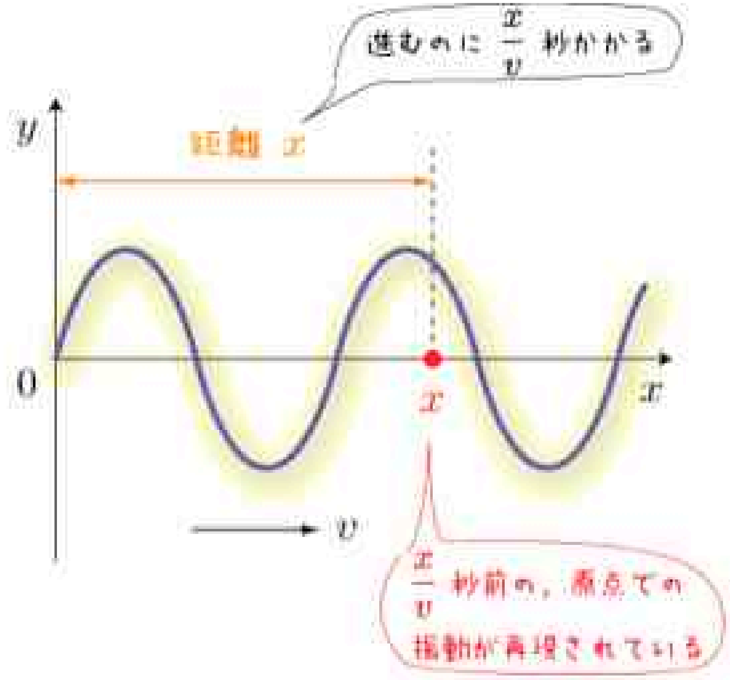


・$t = 5/4T$



原点以外の点ではどのような振動になるか（一般化ということ）

まず、波は右のように伝わっていく。



点xにスポットを当てて考える．今，点xにいる波も元はといえば原点にいたもの．つまり何秒か前の原点の振動がここに再現されているということができる．そこで一体何秒前の原点の振動が再現されているのかを考える．波の伝わる速さをvとすると，原点から点xに到達するまでにx/vという時間がかかっている．つまり，x/v秒前の原点での振動が，今，点xで再現されていることになる．

原点は(1) 式で表される振動をしているわけなので，点 x における変位を $y(t, x)$ とすると，

$$y(t, x) = y(0, t - \frac{x}{v}) = A \sin 2\pi \frac{(t - \frac{x}{v})}{T}$$

となることが分かる。

少し書き換えを行って、

$$y(t, x) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{vT}\right)$$

$$= A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= A \sin 2\pi \left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

という式に書けることがわかる。

実在波（電磁波）の式

$$y_{(t,\,x)} = A\cos 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + iA\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= A\exp\left\{2\pi i\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right\}$$